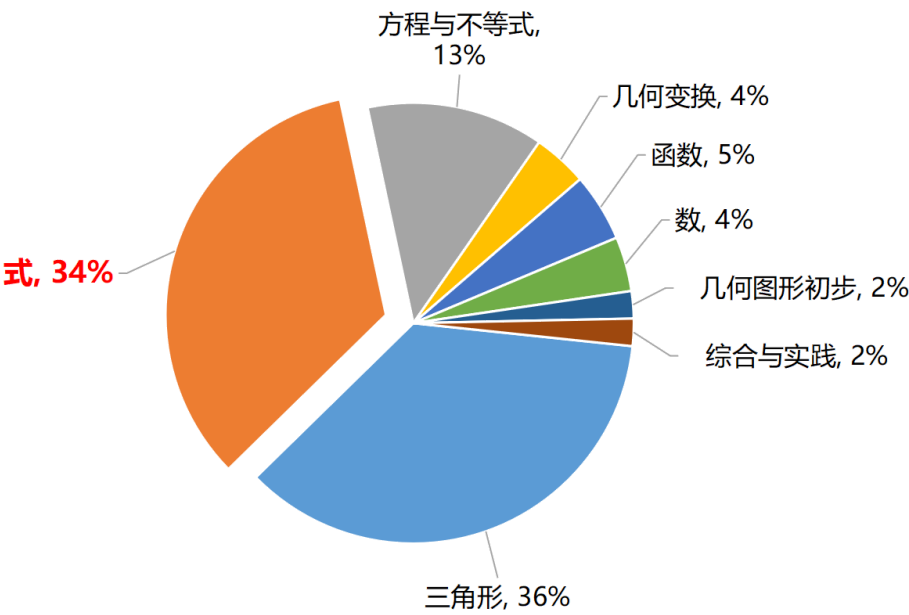


第1讲分式的概念及性质

本模块属于人教版教材第十五章的重要内容，重点包括分式的概念、计算，分式方程等内容，是前面因式分解的后续知识。本模块在期末中占比较大、小题大题均有涉及，故需要学生熟练计算各类型的题目。

本模块难度中等，适用于分式的初步学习，本模块分为分式的概念及性质、分式的计算、分式方程3讲内容，配套练习与讲义内容完全对照，大量计算帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
分式的概念	★	低
分式的性质	★★	中
分式的乘除	★★★	高
分式的加减	★★★★	高
分式方程	★★★★	中

一、分式的概念

1. 分式

分式

分式的概念：一般地，如果 A ， B 表示两个整式，并且 B 中含有_____，那么式子_____叫做分式。其中_____叫做分子，_____叫做分母。

分式有意义的条件：分式的分母 A _____
分式无意义的条件：分式的分母 A _____

【备注】 1、分式的概念：一般地，如果 A ， B 表示两个整式，并且 B 中含有**字母**，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式。其中 A 叫做分子， B 叫做分母。

注意：

① 整式和分式统称为有理式。

② 分式由两个整式组成，其中分数线不仅起到除号的作用，同时还有括号的作用。

③ 分式的分母中必须含有字母，这也是整式和分式的区别，而分子中可以含有字母，也可以不含字母，如 $\frac{12}{x-3}$ ， $\frac{a}{a^2+1}$ 都是分式。

④ 判断式子是否是分式是从**形式**上看，而不是从化简结果看，如 $\frac{x^2}{x}$ 是分式，而不是整式。

⑤ 数学符号 π 等是常数，不是字母，虽然 $\frac{1}{\pi}$ 具有分式形式，但它是整式。

2、分式有意义的条件：分式的分母**不等于0**；

分式无意义的条件：分式的分母**等于0**。

 举个“栗子”

 栗子1

1. 下列各式： $\frac{2}{x}$ 、 $\frac{x+2}{2}$ 、 $\frac{x-xy}{x}$ 、 $3x+\frac{y}{3}$ 、 $\frac{3x}{\pi+2}$ 、 $\frac{3x^2-4}{0.5}$ 中，分式有（ ）。
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【备注】 直接利用概念进行判断，注意 π 为数字，不是字母

【答案】 B

【解析】 $\frac{2}{x}$ ， $\frac{x-xy}{x}$ 是分式，有2个，

故选B.

【标注】【知识点】分式的定义

2. 当 x _____ 时, 分式 $\frac{2}{3x}$ 有意义.
 当 x _____ 时, 分式 $\frac{x}{x-1}$ 有意义.
 当 x _____ 时, 分式 $\frac{2}{x^2-1}$ 有意义.

【备注】考查分式有意义的条件, 第3问注意结果为两个

【答案】 $\neq 0$; $\neq 1$; $\neq \pm 1$

【解析】当 $x \neq 0$ 时, 分式 $\frac{2}{3x}$ 有意义,
 当 $x \neq 1$ 时, 分式 $\frac{x}{x-1}$ 有意义,
 当 $x \neq \pm 1$ 时, 分式 $\frac{2}{x^2-1}$ 有意义.

【标注】【知识点】分式有意义的条件

2. 分式值

分式 $\frac{A}{B}$ 的值	为0	为正	为负	为1	为-1
条件	$\begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$				
举例 $\frac{x+1}{x-1}$	$x = 1$			_____	_____

【备注】

分式 $\frac{A}{B}$ 的值	为0	为正	为负	为1	为-1
条件	$\begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}$	$A = B \neq 0$	$A = -B \neq 0$
举例 $\frac{x+1}{x-1}$	$x = 1$	$x > 1$ 或 $x < -1$	$-1 < x < 1$	——	——

栗子2

3. 若分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值为0，则 x 的值为（ ）。

A. 0

B. 1

C. -1

D. ± 1

【备注】分式值为零一定要注意在分子为零的同时，分母不为零

【答案】B

【解析】 $\because$ 分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值为0，
 $\therefore \begin{cases} x^2-1=0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $x=1$ 。

【标注】【知识点】分式值为0

4. 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $\frac{(m+2)(m-3)}{m^2-4}$ 的值为0。

【备注】与第3题技巧相同，但注意分母不为零时也要注意是不等于2或-2

【答案】3

【标注】【知识点】分式值为0

栗子3

5. 当 x 时，分式 $\frac{1}{1-x}$ 的值为正数。

【备注】因为分子已知，只需要让分母为正即可

【答案】 < 1

【解析】 $\because 1 - x > 0, \therefore x < 1$.

【标注】【知识点】分式值为正负数

6. 已知分式 $\frac{x-3}{x+2}$ 的值为负数，求 x 的取值范围（ ）.

A. $-2 < x < 3$

B. $2 < x < 3$

C. $-3 < x < 2$

D. $-1 < x < 2$

【备注】分子、分母均无法直接判断正负，故需要分类讨论

【答案】A

【标注】【知识点】分式值为正负数

二、分式的基本性质

1. 分式的基本性质

基本性质	分式的分子与分母同乘以（或除以）同一个 <u>不等于0的整式</u> ，分式的值不变。 用式子表示为 $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ 或 $\frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C} (C \neq 0)$ ，其中 A, B, C 均为整式。
应用	(1) 不改变分式的值，把分式的分子、分母中各项的系数化为 <u>整数</u>。 如：$\frac{-\frac{1}{5}x}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y} = \frac{-\frac{1}{5}x \cdot 20}{(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y) \cdot 20} = \frac{-4x}{10x - 5y}.$ (2) 分式的变号法则。 分式中有 <u>三个</u> 符号位置，分别是分子的符号、分母的符号和分式本身的符号，改变其中任何两个符号，分式的值不变。 如：$\frac{b}{a} = \frac{-b}{-a} = -\frac{-b}{a} = -\frac{b}{-a} (a \neq 0), \quad -\frac{b}{a} = \frac{-b}{a} = \frac{b}{-a} = -\frac{-b}{-a} (a \neq 0).$

【备注】1、① “ C 是一个不等于0的整式”是分式性质的一个制约条件，如 $\frac{1}{x+3} = \frac{x-3}{x^2-9}$ ，变形时必须满足 $x-3 \neq 0$ 这一隐含条件。

② 分式的基本性质同分数的基本性质相类似，它是分式变形的理论依据，该性质只能改变分式的形式，而不能改变分式的值的大小，是分式的恒等变形。

栗子4

7. 下列从左到右的变形：① $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$ ；② $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$ ；③ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ ；④ $\frac{a}{b} = \frac{a(x^2+1)}{b(x^2+1)}$ ，其中正确的是（ ）。

A. ①②

B. ②④

C. ③④

D. ①②③④

【备注】直接利用分式的性质进行判断，注意 $C \neq 0$

【答案】B

【解析】① $\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{ab}{b}}$ ，当 $a = 0$ 时，该等式不成立，故①错误；

② $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$ 分式 $\frac{a}{b}$ 的分子、分母同时乘以 b ，等式仍成立，即 $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$ ，故②正确；

③ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ ，当 $c = 0$ 时，该等式不成立，故③错误；

④ $\frac{a}{b} = \frac{a(x^2+1)}{b(x^2+1)}$ ，因为 $x^2+1 \neq 0$ ，即分式 $\frac{a}{b}$ 分子、分母同时乘以 (x^2+1) 等式仍成立，即 $\frac{a}{b} = \frac{a(x^2+1)}{b(x^2+1)}$ 成立，故④正确；

综上所述，正确的②④。

故选B。

【标注】【知识点】分式约分

栗子5

8. 不改变分式的值，把分式的分子和分母各项系数都化成整数：
$$\frac{0.4a - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{5}a + 0.3b} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【备注】利用性质进行化整，注意最小公倍数

【答案】 $\frac{4a-5b}{2a+3b}$

【解析】原式 = $\frac{\left(0.4a - \frac{1}{2}b\right) \times 10}{\left(\frac{1}{5}a + 0.3b\right) \times 10} = \frac{4a-5b}{2a+3b} .$
故答案为： $\frac{4a-5b}{2a+3b} .$

【标注】【知识点】分式基本性质的运用—分子分母系数化为整数

9. 若 x, y 的值均扩大为原来的2倍, 则下列分式的值保持不变的是() .

A. $\frac{3x}{2y}$

B. $\frac{3x}{2y^2}$

C. $\frac{3x^2}{2y}$

D. $\frac{3x^3}{2y^2}$

【备注】每个选项分别进行分析

【答案】A

【解析】根据分式的基本性质, 可知若 x, y 的值均扩大为原来的2倍,

选项A、 $\frac{3x}{2y} = \frac{6x}{4y} = \frac{3x}{2y}$, 正确.

选项B、 $\frac{3x}{2y^2} = \frac{6x}{8y^2}$, 错误.

选项C、 $\frac{3x^2}{2y} = \frac{12x^2}{4y} = \frac{3x^2}{y}$, 错误.

选项D、 $\frac{3x^3}{2y^2} = \frac{24x^3}{8y^2} = \frac{3x^3}{y^2}$, 错误.

【标注】【知识点】分式基本性质的运用—未知数扩大或缩小

10. 如果把分式 $\frac{3xy}{4x-3y}$ 的 x 和 y 的值都扩大为原来的3倍, 那么分式的值() .

A. 扩大为原来的3倍

B. 扩大为原来的6倍

C. 缩小到原来的 $\frac{1}{3}$

D. 不变

【备注】注意到不能直接选不变, 当出现 xy, x^2 等会发生改变

【答案】A

【解析】若分式 $\frac{3xy}{4x-3y}$ 中的 x 值都扩大到原来的3倍,

则分式变为

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot (3x) \cdot (3y)}{4 \times (3x) - 3 \times (3y)} &= \frac{27xy}{12x - 9y} \\ &= \frac{27xy}{3(4x - 3y)} \\ &= \frac{9xy}{4x - 3y} \\ &= 3 \times \frac{3xy}{4x - 3y},\end{aligned}$$

即分式的值扩大为原来的3倍.

故选A.

【标注】【知识点】分式基本性质的运用—未知数扩大或缩小

11. 下列各式的变形中, 不正确的是 () .

A. $\frac{-a-b}{c} = \frac{a-b}{-c}$ B. $\frac{b-a}{c} = -\frac{a-b}{c}$ C. $\frac{-(a+b)}{c} = \frac{a+b}{-c}$ D. $\frac{-a-b}{-c} = \frac{a+b}{c}$

【备注】利用性质进行变号的典型题目

【答案】A

【解析】A. $\frac{-a-b}{c} = \frac{a+b}{-c}$, 故错误;

B、C、D均正确.

故选A.

【标注】【知识点】分式恒等变形

2. 约分

分式约分	与分数的约分类似, 利用分式的基本性质, 把一个分式的分子与分母的 <u>公因式</u> 约去, 叫做分式的约分.
公因式	① 分子、分母系数的 <u>最大公约数</u> ; ② 分子、分母中相同因式的 <u>最低次幂</u> .
最简分式	分子与分母没有 <u>公因式</u> 时, 叫做最简分式. 分式的约分一般要约去分子和分母 <u>所有</u> 的公因式, 使所得结果成为最简分式或整式. 如: $\frac{6a^2b^3c}{8a^3bc^2} = \frac{3b^2}{4ac}$; $\frac{3a^2-a}{a} = \frac{3a-1}{1}$ $\frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$

栗子7

12. 在分式① $\frac{a}{3x}$, ② $\frac{6xy}{2x+2y}$, ③ $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, ④ $\frac{y-x}{(x-y)^2}$, ⑤ $\frac{7x}{x^2+2x}$ 中, 最简分式有 _____ (请写出序号)

【备注】最简分式的概念, 注意分子分母没有公因式

【答案】①③

【解析】① $\frac{a}{3x}$ 是最简;

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \frac{6xy}{2x+2y} = \frac{6xy}{2(x+y)} = \frac{3xy}{x+y}; \\ \textcircled{3} \quad & \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ 是最简}; \\ \textcircled{4} \quad & \frac{y-x}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{(y-x)^2} = \frac{1}{y-x}; \\ \textcircled{5} \quad & \frac{7x}{x^2+2x} = \frac{7x}{x(x+2)} = \frac{7}{x+2}, \end{aligned}$$

故最简分式有①③.

【标注】【知识点】分式约分

栗子8

13. 下列约分正确的是 ().

A. $\frac{2(b+c)}{a+3(b+c)} = \frac{2}{a+3}$

B. $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2} = -1$

C. $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{2}{a+b}$

D. $\frac{x-y}{2xy-x^2-y^2} = \frac{1}{y-x}$

【备注】判断约分是否正确的题目，每个选项进行分析即可

【答案】 D

【解析】 选项A、 $\frac{2(b+c)}{a+3(b+c)}$ 不能约分，故本选项错误.

选项B、 $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2} = 1$ ，故本选项错误.

选项C、 $\frac{a+b}{a^2+b^2}$ 不能约分，故本选项错误.

选项D、 $\frac{x-y}{2xy-x^2-y^2} = \frac{1}{y-x}$ ，故本选项正确.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】分式约分

14. 约分

(1) $\frac{-16x^2y}{20xy^3}$.

(2) $\frac{n^2-m^2}{m-n}$.

(3) $\frac{x^2-4x-12}{x^2+7x+10}$.

【备注】注意，当分子分母可以进行因式分解时，一定要先分解再约分

【答案】 (1) $-\frac{4x}{5y^2}$.

(2) $-n - m$.

(3) $\frac{x-6}{x+5}$.

【解析】 (1) 原式 $= -\frac{4x}{5y^2}$.

(2) 原式 $= \frac{(n+m)(n-m)}{m-n}$
 $= -n - m$.

(3) 原式 $= \frac{(x-6)(x+2)}{(x+5)(x+2)}$
 $= \frac{x-6}{x+5}$.

【标注】【知识点】分式约分

15. 约分 :

(1) $\frac{a^2-3}{2a^3-6a}$.

(2) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$.

(3) $\frac{x^2-xy-2y^2}{x^2-y^2}$.

(4) $\frac{x^2-2xy+y^2-1}{x-y-1}$.

【备注】后两个涉及到较难的因式分解 (十字相乘法 , 分组分解法)

【答案】 (1) $\frac{1}{2a}$.

(2) $\frac{x-1}{x+1}$.

(3) $\frac{x-y}{x-2y}$.

(4) $x-y+1$.

【解析】 (1) 原式 $= \frac{a^2-3}{2a(a^2-3)} = \frac{1}{2a}$.

(2) 原式 $= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$.

(3) 原式 $= \frac{(x-y)(x+y)}{(x-2y)(x+y)} = \frac{x-y}{x-2y}$.

(4) 原式 $= \frac{(x-y)^2-1}{x-y-1} = \frac{(x-y+1)(x-y-1)}{x-y-1} = x-y+1$.

【标注】【知识点】最简公分母

3. 通分

分式通分	与分数的通分类似，利用分式的基本性质，把几个 异分母 的分式分别化成与原来的分式相等的 同分母 的分式，叫做分式的通分。
最简公分母	取各分母的所有因式的 最高次幂 的积作公分母，叫作这几个分式的最简公分母。
最简公分母 (单项式)	当分母为单项式时： ① 系数取单项式中所有系数的最 小 公倍数作为最简公分母的系数； ② 取单项式中相同字母出现的最 高 次幂作为最简公分母中该字母出现的次数； ③ 对只在某一个分母中出现的字母，连同它的 指 一起作为最简公分母的一个因式。 如：通分 $\frac{1}{2a^2b^3}$，$\frac{2}{3ab^2}$，最简公分母为 $6a^2b^3$， $\frac{1}{2a^2b^3} = \frac{3}{6a^2b^3}, \quad \frac{2}{3ab^2} = \frac{4ab}{6a^2b^3}.$
最简公分母 (多项式)	当分母为多项式时： ① 对每个分母 因式分解； ② 找出相同因式的最 高 次幂，作为最简公分母中该因式出现的次数； ③ 对只在某一个分母中出现的因式，连同它的 指数 一起作为最简公分母的一个因式。 如：通分 $\frac{a+1}{a^2-2a+1}$，$\frac{6}{1-a^2}$，最简公分母为 $(a-1)^2(a+1)$， $\frac{a+1}{a^2-2a+1} = \frac{a+1}{(a-1)^2} = \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2(a+1)},$ $\frac{6}{1-a^2} = \frac{6}{(a+1)(a-1)} = -\frac{6(a-1)}{(a-1)^2(a+1)}.$

栗子9

16. 分式 $\frac{1}{x^2+1}$ ， $\frac{1}{x^2-2x+1}$ ， $\frac{1}{x-1}$ 的最简公分母是 ()。

- A. $(x^2+1)(x-1)$ B. $(x^2-1)(x^2+1)$ C. $(x-1)^2(x^2+1)$ D. $(x-1)^2$

【备注】 判断最简公分母，较基础

【答案】 C

【解析】 $\frac{1}{x^2+1}$ ， $\frac{1}{x^2-2x+1}$ ， $\frac{1}{x-1}$ 最简公分母： $(x^2+1)(x-1)^2$ 。
故答案为C。

【标注】【知识点】最简公分母

栗子10

17. 通分.

$$\begin{aligned} (1) & \frac{3c}{2ab^2}, \frac{a}{8bc^2} \\ (2) & \frac{2x}{x-5}, \frac{3x}{x+5} \\ (3) & \frac{2xy}{(x+y)^2}, \frac{x}{x^2-y^2} \\ (4) & \frac{x+1}{x(x-1)}, \frac{x}{x^2-1}, \frac{2}{x^2-2x+1} \end{aligned}$$

【备注】注意，当分子分母可以进行因式分解时，一定要先分解再判断最简公分母

【答案】(1) 答案见解析.

(2) 答案见解析.

(3) 答案见解析.

(4) 答案见解析.

【解析】

$$\begin{aligned} (1) & \frac{3c}{2ab^2} = \frac{12c^3}{8ab^2c^2} \cdot \frac{a}{8bc^2} = \frac{a^2b}{8ab^2c^2} \\ (2) & \frac{2x}{x-5} = \frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)} \cdot \frac{3x}{x+5} = \frac{3x(x-5)}{(x-5)(x+5)} \\ (3) & \frac{2xy}{(x+y)^2} = \frac{2xy(x-y)}{(x+y)^2(x-y)} \cdot \frac{x}{x^2-y^2} = \frac{2xy(x-y)}{(x+y)^2(x-y)} \\ (4) & \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)^2} \cdot \frac{x}{x^2-1} = \frac{x^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)^2} \\ & \frac{2}{x^2-2x+1} = \frac{2x(x+1)}{x(x+1)(x-1)^2} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分式通分

18. 通分.

$$\begin{aligned} (1) & \frac{1}{2x^3y}, \frac{4}{3xz^2}, \frac{5}{4xz} \\ (2) & \frac{x+1}{3x}, \frac{x}{2x+6}, \frac{x-1}{x^2-9} \\ (3) & \frac{x}{x-y}, \frac{y}{x^2+2xy+y^2}, \frac{2}{y^2-x^2} \end{aligned}$$

【备注】重点考察多个式子的通分

【答案】(1)

$$\begin{aligned}
 & \frac{6z^2}{12x^3yz^2} \quad , \quad \frac{16x^2y}{12x^3yz^2} \quad , \quad \frac{15x^2yz}{12x^3yz^2} \cdot \\
 (2) \quad & \frac{2(x+1)(x^2-9)}{6x(x^2-9)} \quad , \quad \frac{3x^2(x-3)}{6x(x^2-9)} \quad , \quad \frac{6x(x-1)}{6x(x^2-9)} \cdot \\
 (3) \quad & \frac{x(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)} \quad , \quad \frac{y(x-y)}{(x+y)^2(x-y)} \quad , \quad \frac{-2(x+y)}{(x+y)^2(x-y)} \cdot
 \end{aligned}$$

【解析】(1) 首先找到最简公分母，然后再通分

(2) 首先找到最简公分母，然后再通分

(3) 首先找到最简公分母，然后再通分

【标注】【知识点】分式通分